Chapitre 3

Limites et continuité

I. Limite à l'infini

1) Limite finie

Si $f(x)$ est « aussi proche de L que l'on veut » dès que x est « assez grand », on dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$.

Définition :

Si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les $f(x)$ dès que x est « assez grand », on dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$.

On note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Propriétés:

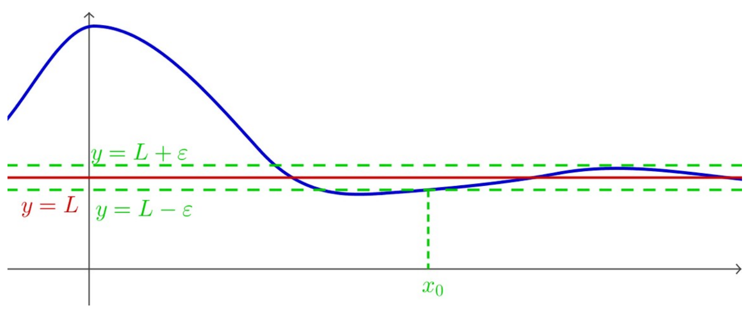
$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

Remarque :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ se traduit par : $\forall \epsilon > 0$, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $x > x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

Interprétation graphique :

La courbe représentant la fonction f dans un repère devient « aussi proche que l'on veut » de la droite d'équation $y = L$ lorsque x est « assez grand ».



Définition :

Lorsque $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, on dit que, dans un repère, la droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** en $+\infty$ à la courbe représentative de f .

Remarque :

Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d d'équation $y = L$, on étudie le signe de la différence $f(x) - L$.

Exemple :

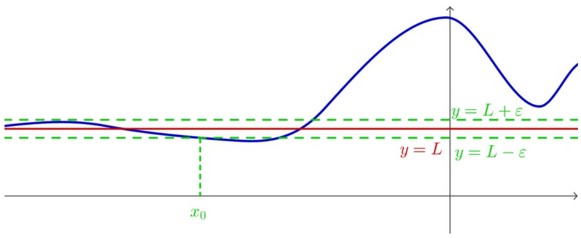
$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de $\frac{1}{\sqrt{x}}$. De plus, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ donc la courbe est située au-dessus de l'asymptote.

De la même façon, on a :

Définition :

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ se traduit par :

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists x_0 \in \mathbb{R}, \ x < x_0 \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon \ .$$



Propriétés:

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$	$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

2) Limite infinie

Dire qu'une fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que $f(x)$ peut être « aussi grand que l'on veut » dès que x est « assez grand ».

Définition :

Si tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ où A est un réel, contient tous les $f(x)$ lorsque x est « suffisamment grand », alors f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

On note :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Propriétés:

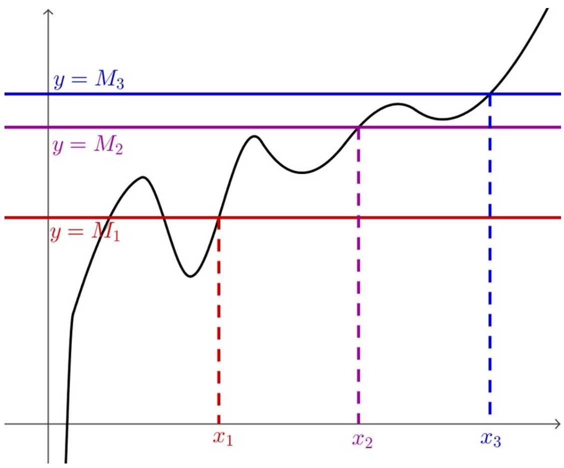
$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ pour $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Remarque :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se traduit par : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ x > x_0 \Rightarrow f(x) > M$.

Interprétation graphique :

La courbe représentative de la fonction f dans un repère est au-dessus de toute droite parallèle à l'axe des abscisses pour x « suffisamment grand ».



Pour $M = M_1$: pour tout $x > x_1$, on a $f(x) > M$.

Pour $M = M_2$: pour tout $x > x_2$, on a $f(x) > M$.

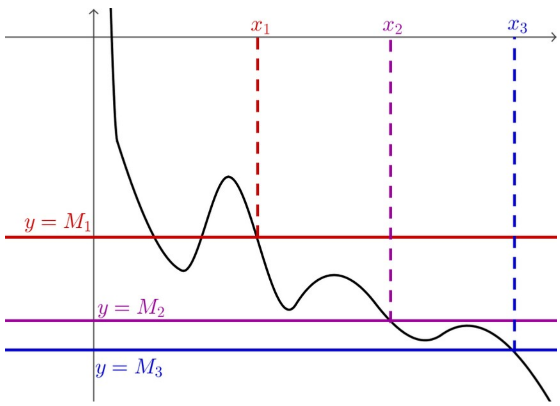
Pour $M = M_3$: pour tout $x > x_3$, on a $f(x) > M$.

De la même façon, on définit les autres limites infinies :

Définition :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se traduit par :

$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ x > x_0 \Rightarrow f(x) < M$.



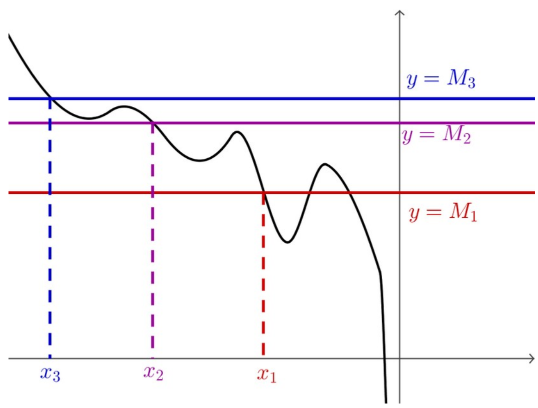
Exemple :

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$

Définition :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se traduit par :

$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x_0 \in \mathbb{R},\ x < x_0 \Rightarrow f(x) > M$.



II. Limite en un réel

1) Limite infinie

Définition :

Soit f une fonction et a un nombre réel, borne de l'ensemble de définition de f n'appartenant pas à cet ensemble.

Si $f(x)$ est « aussi grand que l'on veut » dès que x est « assez proche » de a, on dit que la limite en a de la fonction f est $+\infty$.

On note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Remarque :

En pratique, on est parfois amené à étudier séparément les limites de f pour $x > a$ et pour $x < a$.

On parle alors de « limite de f à droite en a », notée $\lim_{x \to a^+} f(x)$ ou $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ et de « limite de f à gauche en a », notée $\lim_{x \to a^-} f(x)$ ou $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

Propriétés:

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ pour $n \in \mathbb{N}^*$	$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Remarque :

$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ se traduit par : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) > M$.

De la même façon, on a :

Définition :

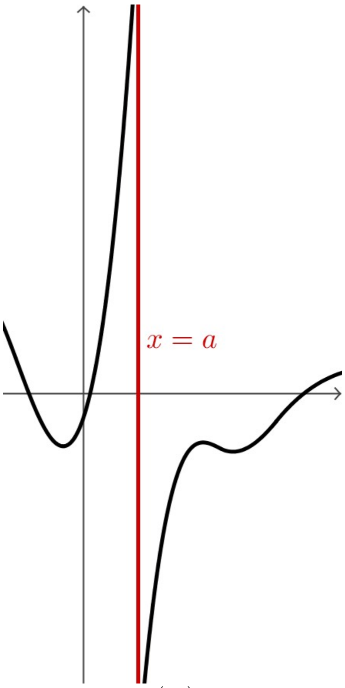
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ se traduit par : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,\ |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) < M$.

Exemple :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

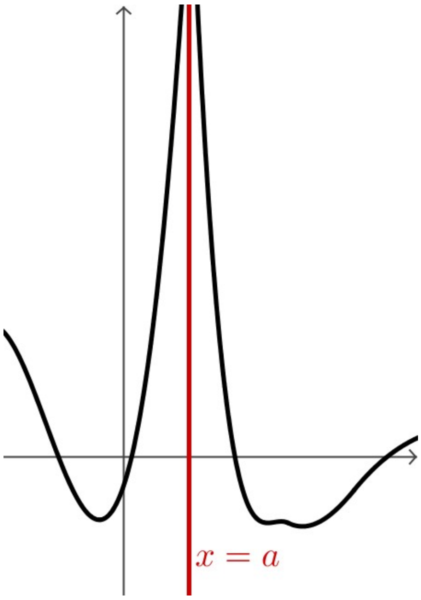
Interprétation graphique :

La courbe représentant f peut être « aussi proche que l'on veut » de la droite d'équation $x=a$.

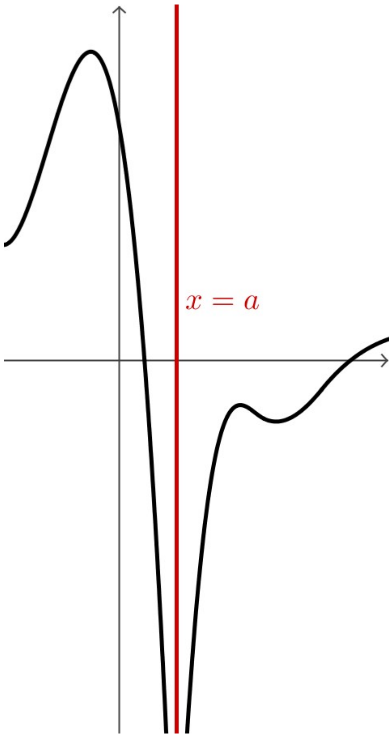


$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Définition :

Lorsqu'une fonction *f* admet une limite infinie en un réel a (ou à droite en a ou à gauche en a), on dit que la droite d'équation $x=a$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f .

Exemple :

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de ces fonctions.

2) Limite finie

Définition :

Soit f une fonction et a un nombre réel, appartenant à l'ensemble de définition de f (éventuellement *a* est une borne). Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Dire que *f* a pour limite ℓ quand *x* tend vers *a* signifie que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Propriétés :

Soit a un réel.

- Si $a \geqslant 0$, $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.
- Si P est un polynôme, alors $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$.
- Si F est une fonction rationnelle (quotient de deux polynômes) définie en a, alors $\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$.
- $\lim_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$ et $\lim_{x \to a} \sin(x) = \sin(a)$.
- $\lim_{x \to a} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a$

III. Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. ℓ et ℓ' désignent des réels.

Si $\lim_{x \to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et $\lim_{x \to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \to a} (f+g)(x) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**On ne peut pas conclure directement**

Exemple :

On cherche la limite en $+\infty$ de $h(x) = x^2 + x$.

On pose $h(x) = f(x) + g(x)$ où $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) + \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Remarque :

Dans le cas où l'on ne peut pas conclure, on dit que l'on a une **forme indéterminée**.

2) *Limite d'un produit*

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**On ne peut pas conclure directement**

<u>Exemple :</u>

On cherche la limite en $+\infty$ de $h(x) = x^2 - x$.

On pose $h(x) = f(x) + g(x)$ où $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, on aboutit à une forme indéterminée pour la limite de $h(x)$.

Pour lever l'indétermination, on factorise la fonction $h(x) = x(x-1)$.

On pose $h(x) = f(x) \times g(x)$ avec $f(x) = x$ et $g(x) = x - 1$. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \times \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

3) *Limite d'un quotient*

- Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	∞
alors $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	**0**	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**On ne peut pas conclure directement**

- Cas où $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	0^+	0^+	0^-	0^-	0
alors $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**On ne peut pas conclure directement**

<u>Remarque :</u>

$\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0^+$ signifie que la limite de g en a est nulle et pour x « aussi proche de a que l'on veut », $g(x)$ est positif.

Exemple :

On cherche la limite en $+\infty$ de $h(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x}$.

On pose $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ avec $f(x)=(x+1)^2$ et $g(x)=x$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, on aboutit à une forme indéterminée pour la limite de $h(x)$.

Pour lever l'indétermination, on développe la fonction $h(x)=\dfrac{(x^2+2x+1)}{x}=x+2+\dfrac{1}{x}$.

On pose $h(x)=f(x)+g(x)$ avec $f(x)=x+2$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

Propriétés :

- Une **fonction polynôme** a même limite en $-\infty$ et en $+\infty$ que son terme de plus haut degré.
- Une **fonction rationnelle** a même limite en $-\infty$ et en $+\infty$ que le quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et son dénominateur.

Exemple :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-3}{3x+4}=\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{3x}=\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3}x=-\infty$$

IV. Limites et comparaison

1) Théorèmes de comparaison

Théorème de minoration :

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x>a$, $f(x)\leqslant g(x)$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

Théorème de majoration :

Soient deux fonctions f et g définies sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ telles que pour tout réel $x>a$, $f(x)\leqslant g(x)$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Exemple :

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x+\sin x$.

Pour tout nombre réel x, $\sin x \leqslant 1$, donc $f(x)\leqslant -2x+1$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty}(-2x+1)=-\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=-\infty$.

Remarque :

Ces deux propriétés s'étendent aux cas des limites en $-\infty$ et en un point en changeant l'ensemble de validité et l'inégalité.

2) Théorème des gendarmes

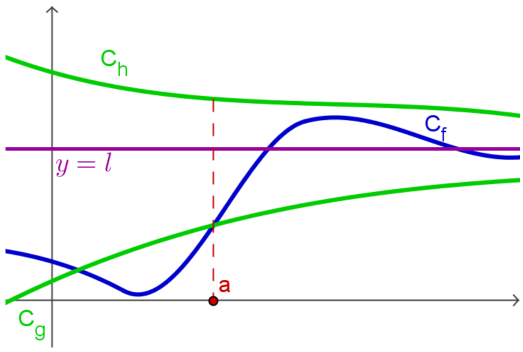
Propriété :

On considère trois fonctions f, g et h définies sur un intervalle de la forme $[a;+\infty[$ telles que :
pour tout réel $x>a$, $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$.

On suppose que :

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)=L$ (où L est un nombre réel.)

Alors f admet pour limite L en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=L$



Exemple :

f est la fonction définie sur $]0:+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

Pour tout nombre réel x, $-1\leqslant \sin x \leqslant 1$. Donc, pour tout nombre réel $x>0$, $\dfrac{-1}{x}\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{1}{x}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=0$.

Remarque :

Ce théorème s'étend au cas de limites en $-\infty$ et en un point en changeant l'ensemble de validité de la condition.

3) Croissances comparées

Propriété :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Démonstration :

f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2$.

Pour tout nombre réel $x \geqslant 0$, $f'(x) = e^x - x$ et $f''(x) = e^x - 1$.
Sur $[0;+\infty[$, $e^x \geqslant 1$, donc $f''(x) \geqslant 0$ et f' est croissante sur $[0;+\infty[$.
$f'(0) = 1$, donc $f'(x) > 0$ sur $[0;+\infty[$.
Donc, f est croissante sur $[0;+\infty[$. Comme $f(0) = 1$, on en déduit que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) > 0$, c'est-à-dire $e^x > \frac{1}{2}x^2$.

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	0 $+$	
$f'(x)$	1 ↗	
$f(x)$	1 ↗	

Par conséquent, pour tout $x > 0$, $\frac{e^x}{x} > \frac{1}{2}x$. Or $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}x\right) = +\infty$ donc d'après le théorème de minoration, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Propriété :

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$$

Propriété :

$$\lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$$

Généralisation :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

V. Fonction continue

1) Continuité

Définition :

Soit une fonction f définie sur un intervalle *I*.

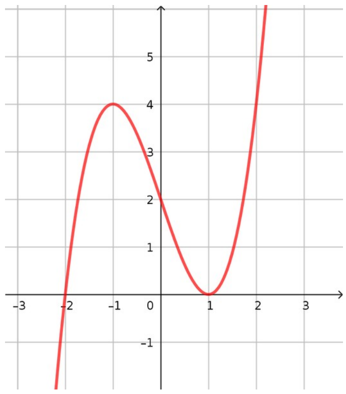
On dit que la fonction *f* est **continue en** un réel ***a*** de *I* si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

On dit que la fonction *f* est **continue sur *I*** si *f* est continue en tout réel *a* de *I*.

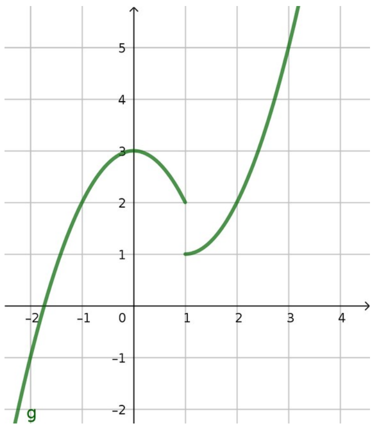
Exemples :

- La fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 2$



f est continue sur $\mathbb{R}$.

- La fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} 3 - x^2 \; si \; x \leqslant 1 \\ x^2 - 2x + 2 \; si \; x > 1 \end{cases}$



g n'est pas continue en 1, donc elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

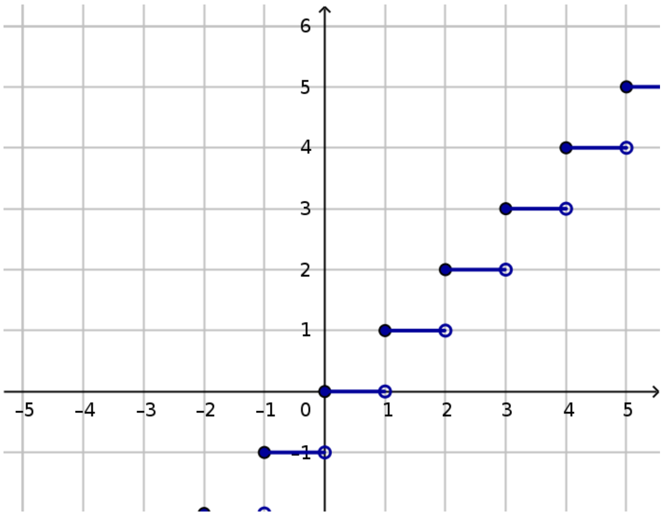
- Les fonctions carrée, cube, cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction partie entière *E* est définie sur $\mathbb{R}$ par $E(x) = n$, où *n* est l'entier relatif tel que $n \leqslant x < n+1$.

  Ainsi si $0 \leqslant x < 1$ alors $E(x) = 0$ et si $1 \leqslant x < 2$ alors $E(x) = 1$.

Donc $\lim_{x \to 1^-} E(x) = 0$ alors que $E(1) = 1$.

On dit que E est **discontinue** en 1, et de façon générale, en tout entier relatif.

La courbe $\mathscr{C}_E$ est « en escaliers » et présente des sauts en ses points d'abscisses entières.



2) Propriétés

Propriétés (admise) :

- Les fonctions affines, les fonctions polynômes, la fonction racine carrée et la fonction exponentielle sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont des fonctions continues sur chacun des intervalles formant leur ensemble de définition.

Exemple :

La fonction f, définie sur $]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x - 1}$, est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;\ 1[$ et $]1\ ;\ +\infty[$ en tant que quotient de fonctions polynômes.

VI. Théorème des valeurs intermédiaires

1) Cas général

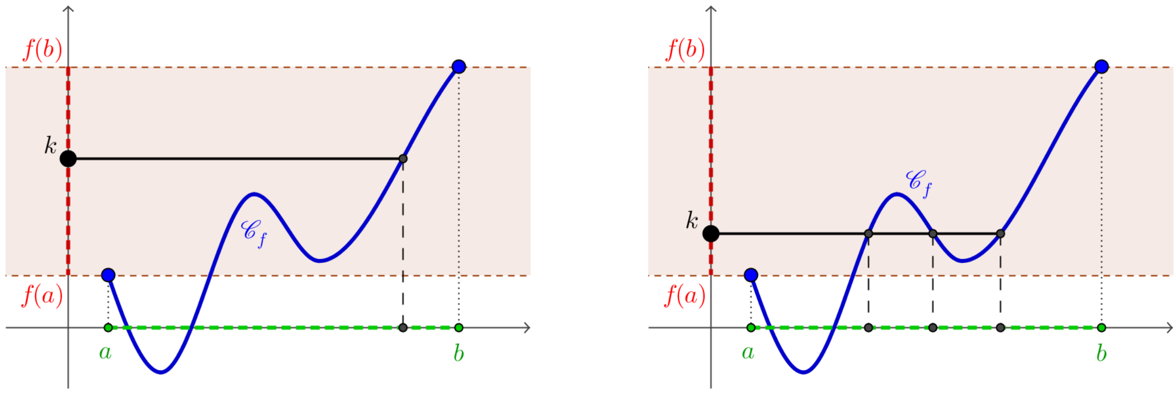
Propriété (admise) :

f est une fonction **continue** sur un intervalle $[a;b]$.

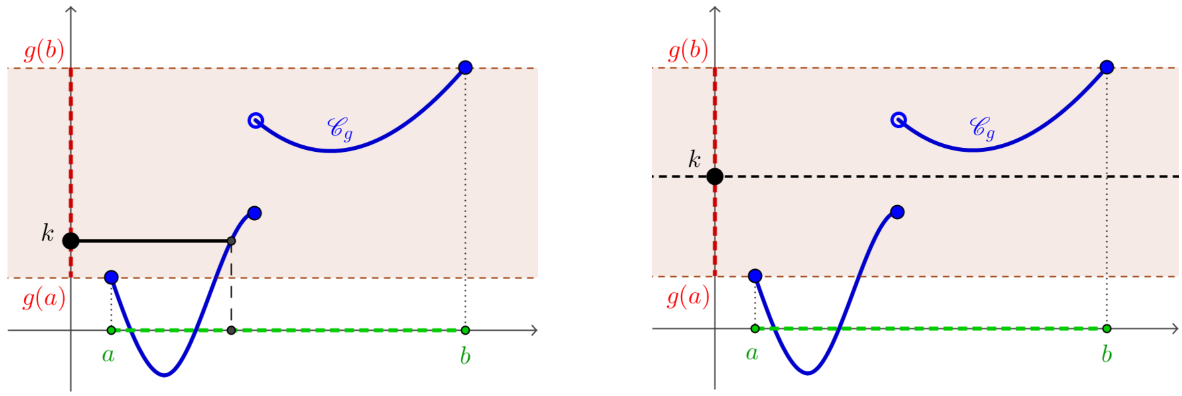
Pour tout réel *k* compris entre *f*(*a*) et *f*(*b*) il existe **au moins** un réel *c* compris entre *a* et *b*, tel que $f(c)=k$.

Exemples :

- *f* est continue sur $[a;b]$, toutes les valeurs comprises entre *f*(*a*) et *f*(*b*) sont prises au moins une fois.



- *g* n'étant pas continue sur $[a;b]$, certaines valeurs comprises entre *g*(*a*) et *g*(*b*) ne sont pas atteintes par *g*.



Remarque :

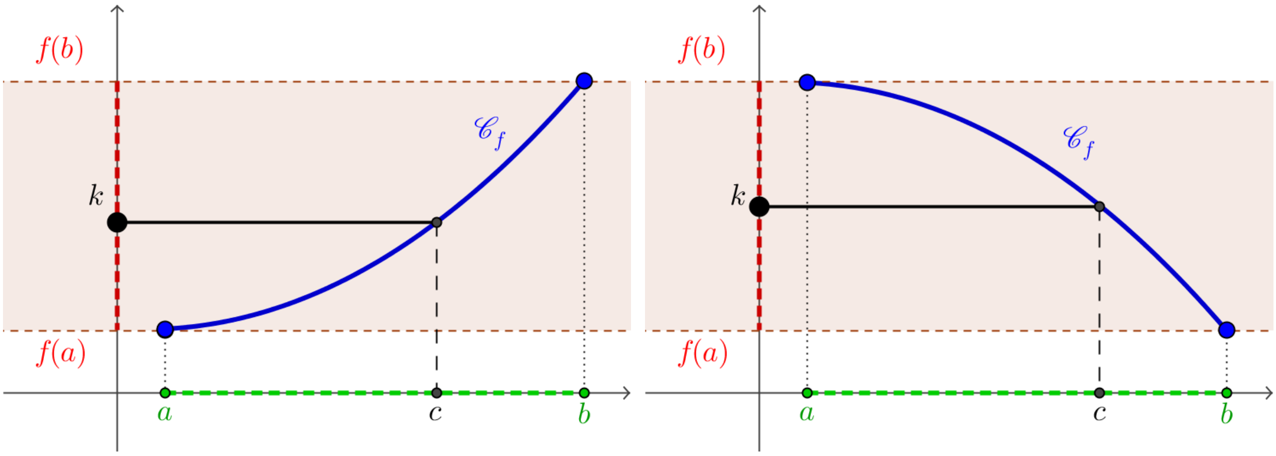
La continuité permet de dire que des solutions existent.

2) Cas des fonctions monotones

Propriété :

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle $[a;b]$ et k un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x)=k$ admet une **unique solution** c située dans l'intervalle $[a;b]$.

Exemples :



Remarques :

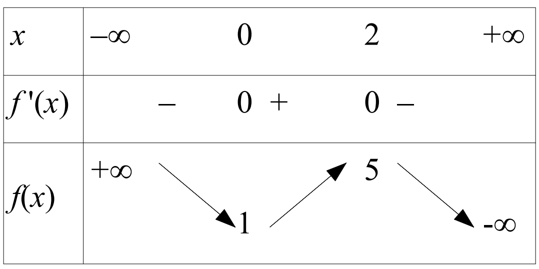
- Dans le cas particulier où 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, sous les hypothèses du théorème précédent, f prend une fois et une seule la valeur 0.

  Ceci signifie que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur $]a;b[$.
- Ce théorème s'étend au cas d'intervalles ouverts ou semi-ouverts, bornés ou non bornés en remplaçant si besoin $f(a)$ et $f(b)$ par les limites de f en a et en b.
- Dans un **tableau de variation** les **flèches** obliques traduisent la **continuité** et la **stricte monotonie** d'une fonction sur un intervalle.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=-x^3+3x^2+1$$



$f'(x)=-3x^2+6x=3x(-x+2)$

$f'(x)=0$ pour $x=0$ et $x=2$

Sur $[2;4]$, la fonction f est continue (c'est une fonction polynôme) et strictement décroissante.

$f(2)=5$ et $f(4)=-15$.

Ainsi l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution α dans l'intervalle $[2;4]$.

3) Extension à d'autres intervalles

On généralise le théorème des valeurs intermédiaires sur un intervalle ouvert.

Propriété :

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $]a;b[$ où a désigne un réel ou $-\infty$ et b désigne un réel ou $+\infty$.

On suppose que f admet des limites en a et b, finies ou infinies.

- Pour tout k compris entre $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to b} f(x)$, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a;b[$.
- Si, de plus, f est strictement monotone sur $]a;b[$, alors cette solution est unique.

Exemple :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x+1$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$.

0 appartient à $]-\infty;+\infty[$ donc l'équation $f(x)=0$ a une unique solution x_0 sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$